



**Universidad
Católica
de Valencia
San Vicente Mártir**

**Propuesta de intervención educativa para
desarrollar las competencias matemáticas en la
resolución de problemas a través del Método
Singapur**

Presentado por: D^a Marina Marín Real

Dirigido por: Dr. D. José Manuel Boquera Navarrete

Valencia, a 27 de mayo de 2021

Facultad de Magisterio y Ciencias de la Educación

Grado en Maestro de Educación Primaria

Índice

1. Introducción.....	10
2. Objetivos	11
3. Metodología	12
4. Marco Teórico	14
4.1 Historia y Evolución de las Matemáticas	14
4.1.1 Egipto	15
4.1.2 China	15
4.1.3 Grecia	16
4.1.4 Roma	17
4.1.5 India.....	17
4.1.6 Arabia	17
4.1.7 Matemáticas actuales.....	18
4.2 Las Competencias Matemáticas	18
4.3 La Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas	20
4.3.1 Dificultades en la resolución de problemas matemáticos	21
4.3.2 Estrategias de enseñanza para la resolución de problemas matemáticos	23
4.3.3 La tecnología en la enseñanza de las matemáticas.....	23
4.3.4 Materiales y recursos didácticos	25
4.4 Currículum Matemáticas	26
4.4.1 Sistema Educativo Singapur.....	26
4.5 Método Singapur	28
4.5.1 Historia del Método Singapur	28
4.5.2 Fundamentación teórica del Método Singapur.....	29
4.5.2.1 Jerome Bruner	29
4.5.2.1.1 Enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto).....	30
4.5.2.1.2 Currículo en espiral.....	31
4.5.2.2 Zoltan Dienes	31
4.5.2.3 Richard Skemp	32
4.5.2.4 George Pólya	33
4.5.3 Método gráfico de Singapur	34

5. Propuesta de Intervención.....	37
5.1 Fundamentación.....	37
5.1.1 Centro.....	37
5.1.2 Grupo.....	37
5.1.3 Justificación con el marco teórico.....	38
5.2 Objetivos.....	39
5.3 Metodología.....	39
5.4 Contenidos y/o actividades.....	40
5.5 Evaluación.....	52
6. Conclusiones.....	55
7. Bibliografía.....	56
8. Anexos.....	60

Índice de ilustraciones

Ilustración 1: Dibujo animado.....	60
Ilustración 2: Plantillas y fichas	60
Ilustración 3: Regletas base 10.....	61
Ilustración 4: Dibujo animado 2.....	61
Ilustración 5: Balanza numérica.....	62
Ilustración 6: Niños con libro y sin libro.....	62
Ilustración 7: Coches de colores.....	63
Ilustración 8: Flores con color y sin color.....	63
Ilustración 9: Página problemas matemáticos	69
Ilustración 10: Problema 1	69
Ilustración 11: Problema 2	70
Ilustración 12: Problema 3	70
Ilustración 13: Problema 4	70
Ilustración 14: Problema 5	70
Ilustración 15: Problema 6	70
Ilustración 16: Problema 7	70

Índice de anexos

Anexo 1: Actividad 1. Representar con fichas.	60
Anexo 2: Actividad 2. Representar con regletas.	61
Anexo 3: Actividad 3. Equilibra la balanza.	62
Anexo 4: Actividad 4. Usamos el lenguaje matemático.	62
Anexo 5: Actividad 5. Problemas con el método gráfico de Singapur.	64
Anexo 6: Actividad 6. Juegos de problemas online	69

Resumen

El aprendizaje de las matemáticas podría suponer un rechazo por parte de algunos estudiantes cuando aumenta la dificultad de los contenidos y se introduce la resolución de problemas. Este trabajo propone el Método Singapur para ayudar y facilitar que los alumnos comprendan los problemas matemáticos. Así pues, se empieza por actividades manipulativas, para continuar con representaciones gráficas y finalizar con la parte más abstracta, que son los símbolos. Esta metodología ha supuesto un cambio en una gran cantidad de países, ya que no pretende la memorización, si no que fomenta principalmente la comprensión, la reflexión y el trabajo en equipo. Este trabajo aporta una propuesta de intervención didáctica en base al método Singapur que se ha desarrollado solo a nivel conceptual.

Palabras clave: Método Singapur, matemáticas, resolución de problemas, modelo de barras, Primaria.

Resum

L'aprenentatge de les matemàtiques podria suposar un rebuig per part d'alguns estudiants quan augmenta la dificultat dels continguts i s'introdueix la resolució de problemes. Aquest treball proposa el Mètode Singapur per a ajudar i facilitar que els alumnes compreguen els problemes matemàtics. Així doncs, es comença per activitats manipulatives, per a continuar amb representacions gràfiques i finalitzar amb la part més abstracta, que són els símbols. Aquesta metodologia ha suposat un canvi en una gran quantitat de països, ja que no pretén la memorització, sinó que fomenta principalment la comprensió, la reflexió i el treball en equip. Aquest treball aporta una proposta d'intervenció didàctica sobre la base del mètode Singapur que s'ha desenvolupat només en l'àmbit conceptual.

Paraules clau: Mètode Singapur, matemàtiques, resolució de problemes, model de barres, Primària.

Abstract

Learning mathematics may be rejected by some students when the difficulty of the content increases and problem solving is introduced. This thesis proposes the Singapore Method to help and facilitate students' understanding of mathematical problems. Thus, it begins with manipulative activities, followed by graphic representations and ending with the most abstract part, which are the symbols. This methodology has brought about a change in a large number of countries, as it does not aim at memorisation, but mainly encourages understanding, reflection and teamwork. This work provides a proposal for a didactic intervention based on the Singapore method, which has been developed only at a conceptual level.

Key words: Singapore Method, mathematics, problem solving, bar model, Primary.

1. Introducción

El siguiente texto pretende profundizar sobre una metodología que tiene origen en Singapur y que supuso una mejora significativa en el sistema educativo, llegando a destacar considerablemente en las pruebas *Programme for International Student Assessment* (PISA) y *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), lo que ocasionó que esta metodología se implantara en países de todo el mundo.

Las matemáticas, dado a su nivel de complejidad, podrían suponer algún rechazo en algunos alumnos, específicamente a la hora de resolver los problemas. La resolución de problemas matemáticos requiere por un lado la comprensión del enunciado y por otro, la realización de la operación matemática en cuestión. El Método Singapur pretende resultar atractivo intentando no producir una pérdida de interés en la asignatura de matemáticas.

Debido a que mi experiencia personal educativa en el ámbito de las matemáticas no fue positiva, principalmente en la resolución de problemas, la búsqueda de un método que ayudara y facilitara este proceso se convirtió en el objetivo principal de mi Tfg. Además, a lo largo del desarrollo de las prácticas he podido observar la dificultad que tenían algunos alumnos a la hora de comprender el problema, y aplicar las operaciones necesarias para llegar a su resolución.

Mediante el método Singapur se trabajaba especialmente la comprensión del enunciado, un factor esencial para poder continuar con el procedimiento de resolución de problemas matemáticos. Además, la representación de las cantidades del problema mediante barras también juega un papel muy importante en este método, ya que pretende que los alumnos visualicen la situación para posteriormente transformar en palabras el proceso realizado.

2. Objetivos

Este trabajo de fin de grado pretende facilitar la comprensión de los problemas matemáticos para que los alumnos sean capaces de resolverlos por sí solos, introduciendo una nueva metodología diferente a las tradicionales.

Objetivo general

- Diseñar una propuesta de intervención para desarrollar las competencias de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos a través del Método Singapur.

Objetivos específicos

- Profundizar a nivel teórico y práctico en el Método Singapur.
- Explorar las dificultades de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos.
- Aportar estrategias de enseñanza para que el docente facilite a los alumnos la comprensión de los problemas.
- Plantear una unidad didáctica aplicando el Método Singapur en alumnos de 2º de Primaria.

3. Metodología

En el siguiente apartado el lector va a profundizar sobre las primeras ideas de este trabajo de fin de grado hasta llegar al resultado final, dando a conocer los diferentes sitios de búsqueda y los pasos que se han llevado a cabo.

En primer lugar, se realizó una lluvia de ideas sobre los temas que resultaban más interesantes y aquellos que podrían suponer una ayuda para mejorar el aprendizaje de los alumnos en algún aspecto. Una vez seleccionado el tema “Método Singapur”, se procedió a tener una primera reunión con el director de este trabajo de fin de grado, en la cual se explicó y detalló cada punto del trabajo para saber en qué consistía y desde qué punto se debía partir. Después de esta reunión, se continuó con la búsqueda de información en Google académico para obtener artículos de fuentes fiables y poder iniciar la elaboración del trabajo.

Una semana más tarde hubo otra reunión con el director en la que se explicó cómo utilizar la base de datos EBSCO, desde dónde se iniciaba la búsqueda hasta la selección de documentos. Procedimos a buscar documentos relacionados con el tema seleccionado y con el término “Método Singapur aplicado a la enseñanza de operaciones básicas con números fraccionarios en estudiantes de grado octavo” se encontraron 77 resultados. A continuación, se encontraron 99 resultados con el término “Singapore mathematics” y por último se encontraron 221 resultados con el título “Singapore education system”. Además de EBSCO, también se han seleccionado documentos de tesis y revistas encontradas en TESEO y Dialnet, y libros en formato digital.

Una vez seleccionados los artículos que se relacionaban con el tema escogido, se procedió a la lectura para poder tener conocimientos y empezar a trabajar en el marco teórico. A partir de ese punto ya se consideró pertinente empezar a reescribir la información leída, teniendo en cuenta las normas APA.

Cuando se obtuvo material suficiente, hubo otra reunión con el director del trabajo para comprobar que la reescritura de la información y las citas estaban siendo escritas correctamente. Además, se aclararon las dudas que iban surgiendo para poder seguir con la escritura adecuadamente.

Al finalizar la redacción del marco teórico se procedió a realizar la propuesta de intervención, que únicamente se ha llevado a cabo a nivel conceptual, y se redactaron los objetivos, así como el planteamiento detallado de diferentes actividades utilizando las fases del método Singapur para ayudar a los alumnos de Primaria en la resolución de problemas matemáticos. Una vez finalizada la propuesta de intervención se llevó a cabo la escritura de las conclusiones para comprobar el cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio del trabajo.

4. Marco Teórico

En el siguiente apartado van a tratarse diferentes aspectos relacionados con las matemáticas. En primer lugar, se hará un recorrido sobre la evolución que han tenido a lo largo de la historia, dando a conocer las aportaciones y los descubrimientos de diferentes civilizaciones.

En segundo lugar, se hablará sobre la importancia del desarrollo de las competencias matemáticas, y de un método para su mejora implementando recursos TIC como herramienta de soporte.

En tercer lugar, se profundizará sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, abarcando las dificultades que los alumnos tienen a la hora de resolver problemas matemáticos, y las estrategias que se pueden aplicar para facilitar este proceso. Además, también se comentarán los diferentes materiales y recursos didácticos que se pueden encontrar para mejorar el aprendizaje de los alumnos y conseguir los objetivos educativos.

En cuarto lugar, se hará referencia al currículo de educación Primaria de la Comunidad Valencia, específicamente del área de matemáticas. Además, se dará a conocer sobre el sistema educativo de Singapur, en concreto los objetivos principales en la enseñanza de las matemáticas, y los cinco componentes para la resolución de problemas.

Por último, se detallará en qué consiste el Método Singapur, se dará a conocer su historia, los diferentes autores que han hecho aportaciones y el método gráfico que se utiliza para facilitar la resolución de problemas.

4.1 Historia y Evolución de las Matemáticas

Las matemáticas conforman una disciplina que a lo largo de su historia, ha respondido a las necesidades sociales y científicas en todas las civilizaciones (Lupiañez, Puig y González-Calero, 2015), por tanto, es una ciencia sistemática, que partiendo de diferentes premisas y a través del pensamiento lógico, estudia características de los objetos, propiedades, relaciones entre objetos e incluso estructuras abstractas. Las características y las estructuras que conforman las matemáticas contribuyen a formar y a

desarrollar las facultades de las personas, siendo así un instrumento de formación y preparación para los ciudadanos.

Las matemáticas son tan antiguas como el propio conocimiento humano, y parten de la necesidad que tenían los seres humanos de contar, medir y establecer una forma a todo lo que tenían a su alrededor. Se puede observar el uso de la geometría en los diseños de utensilios de cerámica y pinturas (Galán, 2012). El surgimiento de las matemáticas se relaciona con el desarrollo de la idea del número, este concepto fue evolucionando de forma progresiva en las diferentes civilizaciones hasta llegar al término de número que conocemos hoy en día.

4.1.1 Egipto

Los primeros conocimientos sobre el uso de las matemáticas empezaron a surgir en Egipto y Babilonia alrededor del año 3000 a.C., y poco a poco fue extendiéndose por el mundo.

Los egipcios usaban una numeración decimal con diferentes símbolos, y para representar los números, escribían el número 1 la cantidad de veces según el número dado, por ejemplo, el número 3 se escribía con tres unos. En el caso de las decenas ocurría lo mismo, pero se escribía el símbolo del 10 la cantidad de veces de la decena dada, es decir, el número 30 se escribía usando el símbolo del 10 tres veces, y así continuamente.

La civilización egipcia fue la primera en resolver problemas con números fraccionarios y poner en práctica su utilidad en problemas que surgían en su crecimiento como pueblo. Además, gracias a su evolución en las matemáticas, consiguieron llegar a la resolución de problemas relacionados con el cálculo de áreas, descubriendo así, el área y el volumen de diferentes figuras geométricas (Galán, 2012).

4.1.2 China

El comienzo de las matemáticas en China puede compararse en antigüedad con el pueblo de Egipto y Mesopotamia, siendo el pueblo Chino, uno de los primeros en descubrir las horas solares.

La mayor obra matemática china, Chou Peique, que data en el año 1200 a.C. se compone de nueve libros o capítulos que constan de pergaminos y escritos, y recopila aspectos importantes para el pueblo chino, que plantea 246 problemas concretos.

La civilización china también tenía la necesidad de dar respuesta a los problemas cotidianos, y sus matemáticas plasmaban la manera que tenían de vivir, siendo la agricultura y la ingeniería las principales actividades. Además, usaban las matemáticas para problemas de ecuaciones y tenían conocimiento sobre los números negativos, pero no los utilizaban para resolver las ecuaciones, ya que señalaban que los resultados no eran factibles.

El método para resolver ecuaciones lineales fue el hallazgo más significativo de este pueblo, e inventaron un tablero de cálculo en el que por colores se diferenciaban los números positivos de los negativos y su uso era parecido al del ábaco (López, Moreno, Gómez y López, 2004).

4.1.3 Grecia

Los griegos revolucionaron el término de matemáticas, siendo la primera civilización en organizar las matemáticas partiendo de definiciones y demostraciones. Se piensa que este cambio comenzó en el siglo IV a.C. con Tales y Pitágoras.

Para comprender el funcionamiento del mundo, Pitágoras enseñó que hay que estudiar los números, lo que llevó a sus discípulos a realizar hallazgos relacionados con la geometría.

Por otro lado, Demócrito averiguó en el siglo V a.C. la fórmula para calcular el volumen de una figura geométrica, que se trató de una pirámide. Esto dio lugar a un avance en el cálculo de volúmenes, y será útil para realizar el cálculo de otras figuras geométricas.

Los investigadores más aplicados a la geometría en Grecia fueron Euclides, Arquímedes y Apolonio, que fueron los encargados en hacer avances sobre la geometría de hoy en día. Por tanto, cabe destacar que las matemáticas en Grecia predominaron en todo el mundo debido a que fueron más sofisticadas que las otras culturas (Galán, 2012).

4.1.4 Roma

El pueblo romano aportó a las matemáticas el sistema de numeración no posicional, mediante el cual utilizaban letras mayúsculas (I, V, X, L, C, D y M) para representar números, es decir, que el valor del símbolo no dependía de la posición en la que se encontrara, sino que tenía una cantidad establecida. Estas letras se combinaban siguiendo unas reglas y un orden para representar valores numéricos.

4.1.5 India

Las matemáticas hindúes tuvieron un mayor desarrollo entre los siglos I y VIII, ya que era una cultura bastante religiosa y usaban las matemáticas para componer monumentos y templos.

Lo que más destaca de esta cultura, es que empezaron a usar el cero y los números negativos. Además, daban como respuesta válida las soluciones con números irracionales, que son aquellos valores que no pueden expresarse a modo de fracción, por ejemplo el número Pi.

Otro aspecto a destacar, es que el sistema numérico hindú era posicional, es decir que cada número tiene un valor según la posición en la que se encuentre. Tenían un símbolo para representar cada número del 1 al 9 y para el 0 idearon el símbolo vacío (López, Moreno, Gómez y López, 2004).

4.1.6 Arabia

El pueblo árabe fue finalmente el encargado de introducir los números en la posición en la que los conocemos actualmente. El 3 vale tres unidades, en decenas el 3 sería 30, en centenas 300 y así continuamente, cosa que no ocurría en la numeración de la civilización griega o babilónica. Además, los árabes perfeccionaron los símbolos del sistema numérico hindú

Al- Khwarizmi es el matemático y astrónomo árabe más destacado, ya que fue el encargado de introducir los números indoarábigos y los principios esenciales del álgebra a los matemáticos europeos.

A lo largo de la Edad Media, los descubrimientos y trabajos de los árabes fueron muy significativos junto con los hallazgos de la civilización griega. Las matemáticas de

los árabes fueron el enfoque principal de Leonardo de Pisa o más conocido como Fibonacci, ya que se basaría principalmente en esta civilización para desarrollar en Europa grandes descubrimientos (Godino, Batanero y Font, 2003).

4.1.7 Matemáticas actuales

En 1900, el matemático David Hilbert expuso en la Conferencia Internacional de Matemáticos de París un listado de 23 problemas matemáticos que servirían como metas para el siglo que estaba empezando.

Un aspecto que sorprendió a Hilbert fue la invención de los ordenadores, ya que esto supondría un avance muy importante para el conocimiento y el futuro de las matemáticas (Galán, 2012).

Una de las primeras calculadoras se inventó en 1642 y su uso consistía en girar unas manecillas para poder realizar sumas, sin embargo, el uso de esta máquina era muy complicado para realizar otras operaciones.

En el siglo XIX, Charles Babbage inventó una máquina que realizaba operaciones matemáticas de forma automática siguiendo los pasos que habían programados en cintas y tarjetas.

Por tanto, podemos concluir que las matemáticas son un conjunto de conocimientos que han evolucionado a lo largo de las civilizaciones, y ejercen un papel muy importante a la hora de resolver ciertos problemas. Además, esta evolución no ha sido únicamente por la acumulación de conocimientos, si no que los conceptos matemáticos se han cambiado, ampliado y precisado a lo largo de los años (Godino, Batanero y Font, 2003).

4.2 Las Competencias Matemáticas

Si bien el punto anterior hablaba de la evolución de las matemáticas en las diferentes civilizaciones hasta la actualidad, este apartado se centra en el pensamiento lógico-matemático y las competencias matemáticas.

Educar el pensamiento lógico matemático es una labor indispensable que debe desarrollarse simultáneamente junto con las actividades matemáticas. Este aspecto

incluye la reflexión a través de materiales que el niño reconozca y actividades en las que esté presente la lógica (Cofré y Tapia, 1995).

Desde una temprana edad, los niños interaccionan con su alrededor y mediante los sentidos establecen relaciones y conexiones que ayudan a entender lo que les rodea. Estas relaciones se van convirtiendo progresivamente en conocimientos cuando vuelven a ser aplicadas en experiencias nuevas o experiencias ya vividas.

Los métodos matemáticos y el pensamiento lógico-matemático son alguno de los cinco pensamientos que conforman las competencias matemáticas (Ministerio de Educación de Colombia, 2016 en Díaz 2020).

Las competencias matemáticas han sido un tema estudiado desde el ámbito internacional y nacional aplicado en todos los niveles educativos (Díaz, 2020). El desarrollo de las competencias en el ámbito educativo ha precisado cambios en las políticas y en las instituciones educativas para la mejora de la educación. (Spencer y Spencer, 1993 en Díaz, 2020).

El informe PISA define las competencias matemáticas como la capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Esto incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para la descripción, explicación y predicción de fenómenos. Según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2017), las competencias matemáticas ayudan a las personas a reconocer qué función desempeñan las matemáticas en el mundo, y contribuyen a emitir juicios y buenas decisiones para construir ciudadanos comprometidos y reflexivos, capacitados para solucionar problemas en contextos personales y profesionales.

El desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes ha dado lugar a la necesidad de cambiar las prácticas pedagógicas de los maestros incorporando herramientas pedagógicas y tecnológicas vinculadas a una metodología adecuada, en la que los alumnos tengan la oportunidad de plantear respuestas a los problemas que se plantean en el aula (Díaz, 2020 y Alba y García, 2019).

La investigadora (Kelly, 2013 en Díaz, 2020), plantea una propuesta de mejora que abarca la creación, la aplicación, el seguimiento y la evaluación de la estrategia

didáctica para la formación y evaluación de competencias matemáticas (EDICOMA) de forma virtual para la resolución de problemas. Además, se incorporan Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) a modo de soporte para desarrollar las competencias matemáticas.

Para llevar a cabo el proyecto se utiliza la Investigación Basada en Diseño (IBD), que es un tipo de investigación orientado a la innovación educativa cuya característica principal es la introducción de un nuevo elemento para cambiar una situación (De Benito e Ibáñez, 2016).

Este proceso, incluye cinco acciones comunes, independientemente de la cantidad de etapas en que se divida, y son la definición del problema, el diseño, el desarrollo, la implementación y la evaluación.

La investigadora evidencia que la metodología implementada y las herramientas TIC, junto con la estrategia didáctica EDICOMA implementada en un entorno virtual ha sido efectivo, por lo que se recomienda que los docentes sigan preparándose tecnológicamente y pedagógicamente con el apoyo de las TIC para generar nuevas herramientas y entornos de aprendizaje.

4.3 La Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas

El apartado anterior se centraba en el pensamiento lógico-matemático y las competencias matemáticas. En este punto se va a tratar la enseñanza y el aprendizaje de esta materia, así como las dificultades y las estrategias en la resolución de problemas, y diferentes materiales para ayudar a los alumnos en este proceso.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en una tarea compleja y fundamental en los sistemas educativos, ya que los profesores y profesoras de matemáticas y de otras áreas científicas se encuentran a menudo con exigencias didácticas innovadoras y cambiantes (Mora, 2003).

La enseñanza se caracteriza como un proceso activo en el que no se requiere únicamente el dominio de los conocimientos matemáticos, sino el uso adecuado de habilidades y destrezas necesarias para desempeñar adecuadamente la labor docente. El conocimiento matemático puede ser adquirido en la escuela desde una temprana edad, aunque también puede ser aprendido a través de experiencias matemáticas interesantes y

significativas, teniendo en cuenta las necesidades, motivaciones e intereses de los escolares.

En la escuela se concede a los estudiantes la responsabilidad de su propio aprendizaje, aunque esto también es tarea de los docentes, que son los encargados de enseñar, por lo que tanto estudiantes como docentes son los responsables del éxito en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Actualmente, los docentes disponen de gran cantidad de recursos y medios para realizar actividades matemáticas, en las que hay que tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para adaptarlas al nivel correspondiente.

Siguiendo a Melquiades (2013), para que el aprendizaje de las matemáticas no resulte una tarea difícil para los estudiantes es imprescindible que el docente transmita los contenidos de acuerdo a las experiencias que los alumnos viven diariamente, por ejemplo aplicando actividades que tengan relación con la compra de un supermercado, pagar un ticket del cine, pesar un alimento, etc. Esto es, basar el conocimiento en el constructivismo y en la estructura del aprendizaje significativo (Ausubel et al., 2000, en Aguilar, Inciarte y Parra, 2011).

Para facilitar el aprendizaje es importante que se establezca la interacción entre los compañeros, ya que a través del diálogo se reforzarán los contenidos y el clima de trabajo será agradable, favoreciendo así las relaciones sociales y el apoyo de unos a otros dentro del aula. Además, el trabajo en equipo es una manera de aprender más rápido, obteniendo formas de pensar diferentes, escuchando y comparando las opiniones del resto de compañeros. Esto favorecerá tanto a los estudiantes, como a los docentes, dado que se puede observar la forma en la que los alumnos adquieren los conocimientos matemáticos, y servirá para diseñar técnicas de enseñanza orales o manipulativas mediante las cuales se dará solución de forma colectiva a las actividades propuestas (Melquiades, 2013).

4.3.1 Dificultades en la resolución de problemas matemáticos

La resolución de problemas matemáticos no se basa únicamente en la comprensión del mecanismo de la operación, sino en saber aplicarla en una situación dada.

Siguiendo a Fernández (2014), los estudios de Piaget y de otra gran cantidad de investigadores, han expuesto que las experiencias que los niños viven, les permiten crear sus propias ideas. Estas concepciones, pueden ocasionar que los alumnos interpreten incorrectamente los enunciados de los problemas y que los resultados sean contradictorios e incongruentes.

La primera dificultad, es la falta de comprensión del problema. En muchas ocasiones, los estudiantes no saben el significado del vocabulario que se utiliza, por lo que, para superar este conflicto se propone que el niño exprese con sus propias palabras el problema y piense otro que sea parecido a uno que ya haya hecho.

Cuando abordamos la resolución de un problema matemático hay dos fases, el procedimiento y la operación que se tiene que utilizar. Se propone desarrollar la herramienta para comprender el enunciado por encima de la mecánica de la operación matemática. Pedagógicamente hablando, se debería poner más peso en la comprensión y aplicación del procedimiento matemático adecuado que en la propia ejecución de una simple operación como una suma, resta, división...

Por tanto, se intenta gestionar un aprendizaje basado en el pensamiento, que el niño sea capaz de buscar la idea y relacionar el contenido con otro más sencillo, por lo que, no se trata únicamente de resolver el problema sino de establecer relaciones.

La segunda dificultad es el uso de estrategias de resolución incorrectas. Los estudiantes al no comprender la relación entre los datos y la pregunta, realizan operaciones aleatoriamente y obtienen resultados sin sentido. Para este problema se propone que los alumnos piensen e inventen un problema que les resulte más fácil, es decir, si las cantidades del problema dado, son muy altas, para que lo entiendan mejor, pueden crear un problema similar pero dando cantidades mucho más bajas. Cabe destacar, que esta técnica de la invención para hacer frente a las dificultades de los problemas es preciso dominarla para que el aprendizaje pueda ser exitoso (Fernández, 2014).

Los errores más comunes que suelen cometer los alumnos son: pasar por alto elementos del enunciado, intuir la pregunta sin hacer una reflexión del problema, hacer operaciones siguiendo el orden de los números que aparecen en el enunciado, buscar soluciones aunque estas no tengan sentido, aplicar sí o sí la última operación estudiada

en clase sin ser necesaria, y usar de forma incorrecta estrategias cuando los datos son con números muy elevados.

4.3.2 Estrategias de enseñanza para la resolución de problemas matemáticos

La asignatura de matemáticas es una de las materias en la que los alumnos presentan una gran dificultad y puede llegar a generar rechazo, pero uno de los contenidos que resulta más complicado son los problemas matemáticos.

Para que los estudiantes tengan interés en los problemas matemáticos, es necesario que el docente les despierte la curiosidad y ofrezca diferentes situaciones para estimular la reflexión. Además, es imprescindible proporcionar a los alumnos recursos y herramientas que les impulse a averiguar por ellos mismos la solución a los problemas (Pérez y Ramírez, 2011).

García (2002), afirma la importancia de usar estrategias en la enseñanza de resolución de problemas, y propone algunas recomendaciones para los docentes. Sugiere que se planteen una variedad de contextos, es decir, unas situaciones cotidianas y otras ficticias en las que se despierte el interés de los alumnos y tengan la oportunidad de desarrollar la creatividad.

Otra propuesta, es plantear problemas de diferentes tipos, mediante los cuales los estudiantes tengan que usar procesos cognitivos distintos en cada situación, y de esta manera no caer en la resolución mecánica y memorística de problemas. Alternar las actividades es otra de las recomendaciones de este autor, es decir, a partir de un enunciado pedir la posible pregunta del problema teniendo en cuenta los datos dados.

Estas recomendaciones se han basado en el método heurístico de Pólya, que tienen como finalidad ayudar a los docentes a mejorar las estrategias de enseñanza a la hora de resolver problemas. Este método, se explicará en el apartado 4.5.2 más detalladamente.

4.3.3 La tecnología en la enseñanza de las matemáticas

El uso de la tecnología ha causado cambios importantes en la forma en la que los estudiantes aprenden matemáticas (Gamboa, 2007). Los recursos tecnológicos pueden

ser herramientas muy eficaces para crear diferentes representaciones y formular preguntas que contribuyan al aprendizaje de las matemáticas.

En la enseñanza tradicional, se ha puesto mucho hincapié en los ejercicios rutinarios con soluciones mecánicas, sin que el estudiante tenga la oportunidad de reflexionar sobre el proceso. Los docentes, comúnmente, muestran únicamente los movimientos correctos para resolver un problema, por lo que los alumnos asocian erróneamente que resolver problemas es aplicar un conjunto de procedimientos que no son accesibles a todos los problemas, sino a unos cuantos.

Peralta (1994, citando en, Gamboa 2007), señala que la producción de automatismos en los estudiantes les lleva, en muchas ocasiones, a realizar cálculos mecánicos sin cuestionarse si tienen sentido o no. Gran cantidad de docentes quitan importancia a las representaciones visuales y evalúan la capacidad que tienen los estudiantes para efectuar los procesos algebraicos.

El uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas puede utilizarse para reforzar y ampliar el conocimiento matemático, aunque muchos profesores no aceptan el uso de ordenadores y calculadoras, ya que tienen la idea de que éstas pueden anular otras habilidades (Martín 2000, en Gamboa 2007). El énfasis se pone en realizar problemas y actividades relacionadas con situaciones cotidianas apoyándose de herramientas tecnológicas que estén al alcance.

Cabe destacar que el uso de la tecnología no sustituye la labor docente, es una herramienta para fortalecer las ideas, pero el docente es el que guía en el proceso de aprendizaje y solventa los problemas que se puedan ocasionar para dirigir a los alumnos en el camino correcto a la solución de las tareas planteadas.

Orozco (2017), afirma que, en muchos países de América Latina, gracias a los cambios en las políticas estatales propuestos en los planes de acción, se conseguirá implementar el uso de las TIC de forma progresiva en la próxima década, con el fin de cubrir todos los niveles educativos.

Como conclusión de este subapartado, podemos afirmar que el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas es una herramienta muy útil para mejorar

y fortalecer los conocimientos de los estudiantes, en la que se pueden hacer una gran variedad de representaciones visuales para contribuir al aprendizaje.

4.3.4 Materiales y recursos didácticos

El material que podemos encontrar tanto dentro como fuera del aula tiene una gran cantidad de usos y es un aspecto importante que el docente debe considerar para aplicarlos y conseguir los resultados esperados (Melquiades, 2013).

Para que los alumnos no pierdan la atención, es necesario mostrar el material en su debido momento y de manera progresiva, es decir, introducir el material poco a poco y en el momento oportuno. Además, para evitar fallos es imprescindible que tanto el docente, como los alumnos, conozcan el funcionamiento y la finalidad del material que van a usar, ya que, con un buen conocimiento del mismo, los estudiantes obtendrán las habilidades necesarias para usarlos y presentarlos.

Respecto a los recursos didácticos, son medios que utiliza el docente para conseguir los objetivos propuestos, favorecer y reforzar el aprendizaje de los alumnos. Se diferencian tres tipos de recursos didácticos que son los formales, es decir, aquellos que contribuyen al aprendizaje significativo de los estudiantes y tienen que ser manejables, palpables y visibles, como por ejemplo: fotografías, imágenes, panfletos, etc. Otro recurso es el propio docente, ya que es el encargado de guiar el proceso de aprendizaje de los alumnos y enseñar los contenidos correspondientes. Por último, los materiales que favorecen la motivación extrínseca, es decir, aquella motivación que viene dada en forma de recompensa.

Para lograr los objetivos educativos, los recursos tienen que ser fáciles de usar y adecuados para los diferentes temas. Además, los recursos que encontramos pueden ser impresos, en los que se incluyen esquemas, mapas, revistas, etc.; de ejecución, como por ejemplo murales, en los que el estudiante muestra lo que ha aprendido respecto a un contenido en específico, y recursos audiovisuales, mediante los cuales los alumnos interactúan con diferentes programas tecnológicos que permiten adquirir y desarrollar destrezas para el aprendizaje de las matemáticas.

Un recurso tecnológico que ha producido cambios en la educación es la Pizarra Digital Interactiva (PDI), pero los inconvenientes que tiene este recurso es que se

necesita un amplio conocimiento de su funcionamiento y no todos los colegios pueden permitirse tener este tipo de pizarras en todas las aulas (Noda, 2009).

Mediante la PDI se pueden realizar gran cantidad de actividades, así como mostrar y mover diferentes imágenes, ver vídeos, corregir ejercicios, jugar y hacer esquemas y dibujos. Es un dispositivo que permite la interacción entre docentes y discentes y fomenta la actividad y participación de aquellos alumnos pasivos.

En este apartado podemos concluir que existen diferentes materiales y recursos para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y motivar a los alumnos para conseguir una participación activa en el aula.

4.4 Currículum Matemáticas

Según el Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana, las matemáticas componen un grupo de conocimientos necesarios para la vida cotidiana que permiten comprender y organizar la realidad, examinarla y obtener información para la toma de decisiones.

Los estudiantes han de aprender matemáticas utilizando contextos asociados a situaciones cotidianas. Este enunciado, concuerda con las afirmaciones de (Alba y García, 2019; Melquiades, 2013...). El éxito en el aprendizaje dependerá de las actividades propuestas, la motivación y los materiales elegidos, ya que el uso de fichas, cubos, monedas, bolas... proporciona a los alumnos una mejor comprensión a través de la manipulación de estos objetos. Además, un aspecto que cabe destacar es el juego, ya que a través de este se puede introducir a los estudiantes en la resolución de problemas de una manera alentadora y agradable.

4.4.1 Sistema Educativo Singapur

El Sistema Educativo de Singapur ha evolucionado a lo largo del tiempo, así como el currículo del área de las matemáticas. Este currículo se puede describir como uno que atiende las necesidades de todos los estudiantes, y su principal objetivo es la resolución de problemas matemáticos, garantizando a los estudiantes poder alcanzar un buen nivel de dominio que será beneficioso para su vida (Ministry Of Education, Singapore, 2012).

Los tres objetivos generales de la enseñanza de las matemáticas en Singapur son:

- Adquirir y aplicar conceptos y habilidades matemáticas.
- Desarrollar habilidades cognitivas y metacognitivas a través de un enfoque matemático para resolver problemas.
- Desarrollar actitudes positivas hacia las matemáticas.

Según el Ministerio de Educación de Singapur, la capacidad de resolución de problemas depende de cinco componentes interrelacionados que son los conceptos, las habilidades, los procesos, las actitudes y la metacognición. Estos componentes son los principales aspectos en los que se debería centrar la práctica docente, para poder ofrecer un entorno de aprendizaje agradable, atractivo, enfocado en el estudiante, con recursos tecnológicos, y promover la diversidad y la creatividad en el proceso de aprendizaje.

Los contenidos matemáticos pueden agruparse en conceptos numéricos, algebraicos, geométricos, estadísticos, probabilísticos y analíticos. Estas categorías están conectadas entre sí y la amplitud y profundidad del contenido varía según la etapa de aprendizaje en la que se encuentren los estudiantes.

Los estudiantes deben estar expuestos a diversas experiencias de aprendizaje para poder comprender los conceptos matemáticos. Estas experiencias incluyen actividades prácticas y el uso de tecnología para ayudarles a relacionar conceptos matemáticos abstractos con experiencias concretas.

Las habilidades matemáticas hacen referencia al cálculo numérico, la manipulación algebraica, la visualización espacial, el análisis de datos, la medición, el uso de herramientas matemáticas y la estimación.

Para que los estudiantes puedan desarrollar las habilidades matemáticas deben proporcionarse oportunidades para que usen y practiquen las habilidades. La enseñanza de estas habilidades no debe enseñarse como simples procedimientos, sino mediante la comprensión de los principios matemáticos (Ministry Of Education, Singapore, 2012).

Los procesos matemáticos hacen referencia al proceso de adquisición y aplicación de los conocimientos matemáticos. Esto incluye el razonamiento, la

comunicación y las conexiones; las aplicaciones y la modelización; y las habilidades de pensamiento y la heurística, que es una regla general de lo que los estudiantes pueden hacer para abordar un problema cuando la solución no es obvia.

Las actitudes hacen referencia a los aspectos afectivos del aprendizaje de las matemáticas como las creencias sobre las matemáticas y su utilidad, el interés y disfrute en el aprendizaje de las matemáticas, las apreciaciones de la belleza y el poder de las matemáticas, la confianza en el uso de las matemáticas y la perseverancia en la resolución de problemas.

Para inculcar actitudes positivas hacia el tema hay que hacer que el aprendizaje de las matemáticas sea divertido, significativo y relevante. Se debe prestar mucha atención y cuidado en el diseño de las actividades para crear confianza y desarrollar aprecio por el tema que se enseña.

La metacognición, o pensamiento sobre el pensamiento, hace referencia a la conciencia y la capacidad de controlar los propios procesos de pensamiento, concretamente en la selección y el uso de estrategias para la solución de problemas.

Para saber cuándo y cómo usar las estrategias metacognitivas y desarrollar la conciencia, los estudiantes deben tener oportunidades para resolver problemas, para discutir las posibles soluciones, para pensar y reflexionar sobre lo que están haciendo y cambiar lo que están haciendo cuando sea necesario (Ministry Of Education, Singapore, 2012).

4.5 Método Singapur

4.5.1 Historia del Método Singapur

El método Singapur surge en los años 80, debido a las bajas calificaciones de los alumnos en las pruebas escolares que hace que, el Ministerio de Educación de Singapur ideara un modelo de enseñanza matemático nuevo. El Ministerio se asoció con la editorial *Mashall Cavendish Education*, un proveedor de material curricular educativo líder en Singapur, y desarrollaron un currículum de matemáticas que asegurara el progreso y la continuidad en el proceso de aprendizaje, ya que los materiales abarcan desde Educación Infantil hasta la Educación Secundaria (polygoneducation.com, 2013).

En los siguientes 30 años, el sistema educativo de Singapur se convirtió en uno de los mejores mundialmente, obteniendo la calificación más alta en diferentes estudios internacionales como *Programme for International Student Assessment (PISA)*, *Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)* y *Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS)*. Este método ha sido implementado en diferentes escuelas de países como Chile, Colombia, Holanda, Francia, Sudáfrica, Estados Unidos, Australia y España.

La continua formación de los profesores, fue una parte imprescindible para el desarrollo de la educación en Singapur, abandonando las clases magistrales y trabajando de manera cooperativa y manipulativa, dándole así, un giro a la labor docente.

El marco curricular, se centró principalmente en la resolución de problemas matemáticos, con el objetivo de que los alumnos adquirieran desde edades tempranas una serie de habilidades y conceptos para desarrollar el pensamiento matemático y poder formular y solucionar problemas matemáticos (Alba y García, 2019).

El método Singapur, pretende que los alumnos adquieran los conocimientos de manera concreta y pictórica, es decir, empleando materiales y modelos visuales para que logren comprender los conceptos y desarrollen el pensamiento lógico y la creatividad matemática. Este método, se centra en la comprensión y no en la memorización, busca que los estudiantes sean los que construyan su conocimiento por medio de experiencias particulares y significativas.

4.5.2 Fundamentación teórica del Método Singapur

El Método Singapur, se sustenta en estudios y teorías de diferentes psicólogos, pedagogos, educadores y otros expertos que tienen como objetivo común lograr el desarrollo.

4.5.2.1 Jerome Bruner

Alonso, López y De la Cruz (2013), aportan que el Método Singapur se fundamenta en las teorías de Bruner, y comentan que el profesor debe ser el encargado de proporcionar a los estudiantes situaciones problemáticas que ayuden a estimular y a descubrir los conceptos, las relaciones y los procedimientos por sí mismos.

4.5.2.1.1 Enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto).

Este enfoque nace de la teoría de Bruner, que determinó que los alumnos tienen que pasar por tres procesos (enactivo, icónico y simbólico) para conseguir un conocimiento conceptual completo en la enseñanza. Aramburu (2004), afirma que el sujeto transforma la información que recibe por medio de estos tres sistemas de representación.

En la representación enactiva, el estudiante representa acontecimientos, hechos y experiencias a través de la acción. Se aprende a través de la actuación, la imitación y la manipulación de objetos, es decir, a la hora de aprender un baile los niños utilizan este modo de representación, ya que están imitando los pasos que se les indican.

La representación icónica echa mano de la imaginación y se trata de representar cosas a través de imágenes y esquemas espaciales, es decir, se enseñan tarjetas con diferentes dibujos para que el niño represente mentalmente la idea del objeto que se muestra. Para que se desarrolle la imagen adecuada es preciso haber obtenido un nivel determinado de destreza y práctica motriz.

La representación simbólica requiere de símbolos para representar el mundo, es decir se utiliza el lenguaje hablado y escrito en el proceso de aprendizaje para adquirir y almacenar conocimientos y comunicar ideas.

El aprendizaje de las matemáticas debe ir de forma progresiva desde lo concreto hasta lo abstracto, por lo que se empieza con materiales concretos, cercanos a ellos y manipulables. Después con representaciones gráficas, y por último los símbolos, ya que este enfoque pretende que los estudiantes aprendan el significado de lo que están haciendo.

Yeap Ban Har (2010, citado en, Rambao y Lara 2019) afirma que los niños realizan el aprendizaje con el manejo de objetos concretos, que posteriormente se pueden reflejar en una relación gráfica. En lugar de utilizar monedas en la resolución de problemas, en este método, existen cubos que representan su valor, hasta pasar a un nivel simbólico.

4.5.2.1.2 Currículo en espiral.

El currículo en espiral se basa en que los contenidos se presentan gradualmente teniendo en cuenta el nivel cognitivo de los alumnos. Parte de los conceptos más sencillos a los más complejos, de lo específico a lo general y de lo concreto a lo abstracto. Además, se basa en que deben existir diferentes oportunidades de aprender algo y pretende asentar los conocimientos a través de la profundización de ellos.

4.5.2.2 Zoltan Dienes

El matemático Zoltan Dienes (1981, citado en, Berrocal y Gómez 2002), sostiene que existen diferentes etapas que hay que tener en cuenta a la hora de organizar el proceso de enseñanza de las Matemáticas.

El autor establece seis etapas para el aprendizaje de las matemáticas: el juego libre, el juego estructurado o etapa de consigna, isomorfismo, representación gráfica, verbalización y los juegos de demostración.

En primera etapa, juego libre, los alumnos eligen un material concreto que también puede ser facilitado por el docente. Mediante este material, los estudiantes crean su propio juego a través de la manipulación del mismo. En la segunda etapa, juego estructurado o etapa de la consigna, el docente muestra los pasos a seguir utilizando el material que se ha empleado en la etapa previa. En la tercera etapa, isomorfismo, se presenta a los alumnos un juego diferente con la misma estructura que el anterior para encontrar semejanzas y diferencias. En la cuarta etapa, representación gráfica, los alumnos representan las actividades realizadas anteriormente de forma gráfica. En la quinta etapa, verbalización, los alumnos describen verbalmente las representaciones gráficas utilizando un lenguaje que ellos mismos han inventado. En la sexta y última etapa, juegos de demostración, los alumnos convierten las descripciones en teoremas a través de la puesta en práctica de nociones vividas.

Zoltan Dienes (1960, citado en, Alcalde 2010) expone que en el aprendizaje de las matemáticas hay que aplicar cuatro principios: el principio dinámico, el de construcción, el de variabilidad perceptiva y el de variabilidad matemática.

En el principio dinámico, el aprendizaje pasa de la experiencia a la categorización, por medio de ciclos que suceden generalmente uno a otro. Cada ciclo

consta alrededor de tres etapas: una etapa del juego preliminar, la cual está poco estructurada y se corresponde a una actividad de juego libre; una etapa constructiva, que está más estructurada y dirigida; y una etapa de anclaje, en la que la visión nueva se fija con firmeza.

En el principio de construcción, el estudiante tiene un primer contacto con las realidades matemáticas a través de la construcción, la manipulación y el juego, teniendo en cuenta el nivel de maduración de los estudiantes.

En el principio de variabilidad perceptiva, la estructura del concepto que se está enseñando debe presentarse de todas las maneras posibles para que los estudiantes la perciban y puedan adquirir el sentido del concepto.

En el principio de variabilidad matemática, los conceptos que tienen más de una variable se deben enseñar a través de distintas actividades mediante las cuales se manipulen todas las variables.

Calderón (2014), afirma que la variación sistemática es otro fundamento teórico que sostiene el Método Singapur. Esta teoría plantea que las estructuras matemáticas sean enseñadas a través de una variedad de tareas, evitando así la repetición.

4.5.2.3 Richard Skemp

Arias, Arrunátegui, Julca y Zúñiga (2017), afirman que otro autor que aportó al Método Singapur fue Richard Skemp, el cual diferencia dos tipos de aprendizaje, el habitual y el inteligente. El aprendizaje habitual se basa en la memorización y se utiliza para llevar a cabo acciones básicas, mientras que el aprendizaje inteligente es el que diferencia a los humanos de otras especies, ya que implica la comprensión. Además, plantea dos tipos de comprensión de las matemáticas: la instrumental (saber hacer), en la que los estudiantes tienen que aprender a realizar operaciones sin conocer la razón de la operación; y la relacional (saber qué), en la que, sin saber realizar operaciones, los estudiantes conocen las estructuras que explican lo que deben hacer.

Sin embargo, (Skemp, 1976, citado en, Godino 2004) concluye en que la enseñanza matemática debe enfocarse en la comprensión relacional, ya que la comprensión instrumental supone aplicar numerosas reglas por lo que puede fallar cuando la tarea no se ajusta a lo establecido.

4.5.2.4 George Pólya

Pólya (1965 citado en, Boscán y Klever 2012) introduce el término “heurística” para describir la resolución de problemas a través de una serie de preguntas e instrucciones aplicadas a diversos ejemplos.

Así mismo, el autor establece una serie de preguntas para estimular el pensamiento de aquellas personas que se enfrentan al problema, y propone cuatro fases para la resolución de problemas:

La primera fase es la comprensión del problema. Este estadio consiste en la identificación de datos e incógnitas y el cuestionamiento. Es sin duda la etapa más complicada, ya que los estudiantes tienen que apropiarse el problema para entenderlo y concretarlo en pocas palabras sin modificar la idea principal. Se plantean preguntas como: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos y las condiciones?

La segunda fase sería la de concebir un plan. En esta etapa se recomienda encontrar un problema que se asemeje al que se confronta. El docente debe guiar a los estudiantes para la elaboración de un plan, pero sin imponérselo. Se plantean preguntas como: ¿conoce un problema relacionado con éste?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿ha empleado todos los datos?

La tercera fase consiste en la ejecución del plan. Cada vez que se tiene una propuesta debe ejecutarse y observar los resultados. El tiempo para resolver un problema es relativo y en ocasiones es preciso un ir y venir entre la concepción y la ejecución del plan para obtener un próspero resultado. Se plantean preguntas como: ¿puedes ver claramente que cada paso o función auxiliar es correcta? ¿Puedes apoyarte en otros problemas que has resuelto?

La última etapa, se basaría en examinar la solución obtenida. Consiste en una visión retrospectiva en la que se considera la resolución y el procedimiento del problema. Esta fase ayuda a los estudiantes a fortalecer sus conocimientos y desarrollar aptitudes para la resolución de problemas. Se plantean preguntas como: ¿puede emplear este resultado o el método en otro problema?

4.5.3 Método gráfico de Singapur

Con la intención de innovar en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Singapur se introduce el método del modelo de barras para la resolución de problemas (Zúñiga, 2013). Este método, fue desarrollado por un equipo de profesores del Ministerio de Educación de Singapur, encabezado por el doctor Kho Tek Hong y algunos educadores, como Hector Chee y Sin Kwai Meng, con el objetivo de eliminar las malas prácticas y las dificultades que los estudiantes mostraban a la hora de la resolución de problemas en los primeros años de Primaria.

El modelo de barras, consiste en dibujar rectángulos para representar los valores matemáticos, lo que permite a los estudiantes crear un modelo pictórico para representar la información del problema que se describe. Este proceso, permite representar tanto la información explícita como la implícita y posibilita la toma de decisiones a la hora de llegar a la solución del problema.

Urbano, Fernández y Fernández (2016), afirman que existen tres formas de aplicar el modelo de barras, pero todas comparten la misma filosofía. Cabe destacar que el mismo problema se puede resolver de distintas maneras, por lo que no necesariamente cada problema se asocia a un único modelo.

El modelo Parte-Todo, se utiliza para representar situaciones en las que existe un total dividido en dos o más partes. Cuando las partes se conocen, el estudiante, a través de la suma de cada una de ellas, puede conocer el todo.

Por otra parte, cuando se conoce el todo y alguna de las partes, mediante la resta se puede averiguar la parte restante. Cuando el todo está dividido en porciones equivalentes puede utilizarse este modelo a la hora de resolver problemas de multiplicaciones y divisiones (metodosingapur.com, 2011).

El modelo de Comparación, se emplea para comparar dos o más situaciones diferentes. Para cada una de las situaciones, el estudiante debe dibujar una barra alineada, las cuales tendrán longitudes diferentes, ya que cada una indicará una cantidad. Cuando se muestran las cantidades, por ejemplo A y B, se puede encontrar la diferencia entre uno y otro.

El modelo Antes-Después, se aplica para relacionar dos valores, uno nuevo y el valor original antes de ser modificado. Este modelo suele utilizarse en problemas con estructuras más complicadas.

El Dr. Kho Tek Hong, establece una serie de razones por las que se debería utilizar el modelo de barras en la resolución de problemas matemáticos. La primera razón, es que ayuda a los estudiantes a tener una mayor comprensión de conceptos como fracción, ratio o porcentaje. La segunda razón, es que ayuda a los alumnos a establecer un plan paso a paso para resolver problemas aritméticos. La tercera razón, consiste en que es un método comparable pero mucho menos abstracto que en los métodos algebraicos. La cuarta y última razón, es que estimula a los estudiantes a implicarse en los problemas desafiantes (metodosingapur.com, 2011).

Este método, consiste en que los estudiantes sigan ocho pasos sencillos para resolver problemas, por lo que juega un papel fundamental la comprensión lectora para poder aplicar las operaciones necesarias y llegar a la resolución.

El primer paso, se basa en la lectura del problema, puede leerse tantas veces como sea necesario para entenderlo, ya que es importante que el niño comprenda qué pide el enunciado y así pueda descifrar las operaciones necesarias. En caso de que el alumno no consiga descodificar el enunciado, el docente es el encargado de intervenir en el proceso y proporcionar la información pertinente para que pueda continuar. Además, otro aspecto que cabe destacar es la importancia de relacionar los problemas con contextos cercanos a los alumnos, de esta manera será más fácil su comprensión. (Hilaquita, 2018, citado en Alba y García, 2019). Un ejemplo de este paso sería: Carlos fue al mercado y compró 5 manzanas. Su amiga Paula le dio 3 más. ¿Cuántas manzanas tiene Carlos?

El segundo paso, trata de determinar sobre qué o de quién se habla en el problema. Después de la lectura, los estudiantes identifican los datos principales y a modo de ayuda pueden realizarse una serie de preguntas: ¿De qué se habla? y ¿De quién se habla? En el caso de la primera pregunta y tomando como referencia el ejemplo anterior, la respuesta sería las manzanas, y en la segunda pregunta la respuesta sería Carlos.

El tercer paso, consiste en dibujar una barra de unidad o como se ha detallado en el principio del apartado, el modelo de barras. Se utilizan los recursos visuales para hacer posible el procesamiento de la información dada y dar sentido a las cantidades del problema. La atención se centra en el proceso que han llevado los alumnos hasta dar con la solución, y no en la obtención de la respuesta correcta, ya que lo que se pretende es que entiendan todo el procedimiento llevado a cabo.

El cuarto paso, es la relectura del problema frase por frase. Aunque parezca un proceso muy repetitivo es necesario para detectar los datos principales y se recomienda releer el problema hasta cinco veces.

El quinto paso, trata de ilustrar las cantidades del problema. De esta forma se crean estrategias mentales y refuerza el pensamiento. Un ejemplo de representación sería utilizando el modelo de barras.

El sexto paso, consiste en identificar la pregunta para plantear el tipo de operaciones que necesitan realizarse. En el ejemplo planteado, la pregunta era cuántas manzanas tiene Carlos, por lo tanto con las cinco que compra y las tres que le da su amiga Paula se puede plantear la operación correspondiente.

El séptimo paso, hace referencia a la realización de las operaciones correspondientes. Con los datos obtenidos y la representación gráfica de las cantidades, los alumnos pueden realizar la cantidad de operaciones matemáticas necesarias para resolver el problema. En esta fase, los estudiantes desarrollan la capacidad de análisis. Para el problema planteado, la operación correspondiente sería $5 + 3 = 8$.

El último paso, se trata de escribir la respuesta con una oración. Una vez realizadas las operaciones pertinentes y haber obtenido el resultado, se escribirá en una oración en la que expresen claramente los datos que se han obtenido. Por tanto, con el ejemplo aportado, la respuesta sería Carlos tiene ocho manzanas.

5. Propuesta de Intervención

5.1 Fundamentación

5.1.1 Centro

Esta propuesta de intervención va destinada al 2º curso de Educación Primaria del Centro de Estudios Marni, un colegio concertado y plurilingüe que se caracteriza por buscar las mejores técnicas educativas y cuenta con innovaciones tecnológicas.

El centro está ubicado en Orriols, un barrio obrero en el que predominan familias desestructuradas con un bajo nivel económico. En este barrio, la realidad social es bastante complicada, ya que existen varios grupos que realizan actividades ilegales, por lo que es un punto negativo para el entorno escolar.

Por lo que respecta al nivel económico de las familias, la mayoría tiene formación académica superior y cuentan con un trabajo estable. Otro aspecto es la diversidad cultural, ya que en muchas aulas se encuentran alumnos que proceden de países distintos, por ejemplo, China o Marruecos.

5.1.2 Grupo

El grupo de 2º de Primaria cuenta con 24 alumnos en total, siendo 11 chicas y 13 chicos y la edad oscila entre los 7 y 8 años. En el aula, se encuentra un alumno procedente de China pero lleva toda su etapa educativa en este centro por lo que no tiene problemas con el castellano y puede seguir el ritmo de la clase perfectamente, por lo que el idioma no le supone ningún problema para su proceso de aprendizaje.

El ambiente de trabajo es bastante bueno, aunque los ritmos de aprendizaje en algunos casos son distintos por lo que hay que ir muy despacio en las explicaciones para dar paso a la resolución de dudas y que todo quede bien claro para seguir procediendo.

Este centro, da muchas oportunidades a que se trabaje por equipos, y de esta forma se ayuden unos a otros favoreciendo la comunicación, la ayuda y la cooperación entre ellos, estimulando el aprendizaje individual y del propio grupo.

5.1.3 Justificación con el marco teórico

Mediante esta propuesta de intervención educativa, se pretende mejorar significativamente la comprensión de los problemas matemáticos, estableciendo una serie de actividades estructuradas, y siguiendo el enfoque C-P-A y los pasos del método gráfico de Singapur.

Otro aspecto a destacar es que pretende un aprendizaje comprensivo y significativo, dejando atrás la memorización para construir poco a poco el conocimiento, a través de la manipulación de materiales, y soportes visuales que ayuden a los alumnos en este proceso de la forma más satisfactoria posible.

El trabajo en equipo, también será un factor esencial en este proceso, ya que a través de la ayuda y la colaboración de todos, podrán dar solución a las diferentes situaciones/problemas planteados a lo largo de las actividades. Además, aprenderán unos de otros y se fomentarán las relaciones sociales.

5.2 Objetivos

Objetivo general

- Comprender la resolución de problemas matemáticos.

Objetivos específicos

- Representar con materiales manipulativos las operaciones/ situaciones/ problemas matemáticos.
- Utilizar el modelo gráfico para representar los problemas.
- Explicar oralmente el proceso seguido en la resolución de problemas.

5.3 Metodología

La metodología en la que se basa esta propuesta de intervención es la que caracteriza al método Singapur, empezando por actividades concretas para continuar con representaciones visuales y finalizar con la parte más abstracta, que son los símbolos.

En primer lugar, para la fase concreta, se presentarán una serie de actividades con materiales manipulativos, en las que los alumnos tendrán que resolver las situaciones planteadas a través de diferentes elementos que les ayuden a visualizar y a adquirir el conocimiento mediante situaciones cercanas a ellos. Estas actividades se empezarán de forma individual para familiarizarse primer con los materiales, y a continuación, se harán parejas y pequeños grupos para el resto de ejercicios.

En segundo lugar, para la fase pictórica, se presentarán unas fichas con dibujos en la parte izquierda de la hoja. En el otro lado, se encuentra un esquema que tendrán que rellenar teniendo en cuenta el número de dibujos que hay y sus peculiaridades, ya que para poder realizar las sumas y restas planteadas hay que tener en cuenta el número de dibujos y sus diferencias.

En tercer lugar, para la fase abstracta y la más compleja, se proporcionará a los alumnos una serie de problemas con los pasos propios del modelo gráfico de Singapur, que deberán ir siguiendo poco a poco. Además, tendrán que representar los datos del problema para tener una mejor visión y poder llegar al resultado final.

Por último, para incorporar las TIC, los alumnos realizarán una serie de juegos que consisten en problemas divididos en varias fases y preguntas con diferentes opciones, por lo tanto según los datos dados tendrán que seleccionar la respuesta adecuada hasta llegar a la última fase y finalizar los problemas.

5.4 Contenidos y/o actividades

Criterio de evaluación	Reescritura del criterio	Indicadores
BL1.2 En la resolución de problemas y pequeñas investigaciones científicas, utilizar diferentes estrategias como la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante dibujos y tablas, comunicando con claridad el proceso seguido.	En la resolución de problemas, utilizar la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante el método gráfico de Singapur, comunicado con claridad el proceso seguido.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Utiliza la manipulación y la experimentación como estrategias para la resolución de problemas. 2. Representa los problemas mediante el método gráfico. 3. Explica oralmente el proceso seguido en la resolución de problemas utilizando vocabulario específico.

Indicadores evaluados	Competencia y dimensión o rasgo específico con el que relacionas cada indicador evaluado
1. Utiliza la manipulación y la experimentación como estrategias para la resolución de problemas.	<p>Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</p> <p>1CMCT. Aplica las estrategias, técnicas de cálculo y operaciones con rigor.</p> <p>3CMCT. Produce e interpreta datos valorando el grado de certeza asociado a los mismos.</p> <p>Competencia aprender a aprender. CAA</p> <p>3CAA. Pasa de la información al conocimiento.</p> <p>7CAA. Manejo de recursos y estrategias.</p>

<p>2. Representa los problemas mediante el método gráfico.</p>	<p>Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</p> <p>1CMCT. Aplica las estrategias, técnicas de cálculo y operaciones con rigor.</p> <p>3CMCT. Produce e interpreta datos valorando el grado de certeza asociado a los mismos.</p> <p>5CMCT. Comprende y resuelve problemas matemáticos relacionados, cuando sea posible, con la vida cotidiana o integrada en las demás materias, para resolver cualquier tipo de situación.</p> <p>8CMCT. Utiliza y manipula herramientas y máquinas tecnológicas</p> <p>Competencia lingüística. CL</p> <p>8CL. Busca, recopila y procesa información.</p> <p>Competencia aprender a aprender.</p> <p>1CL. Pasa de la información al conocimiento.</p> <p>4CL. Estructura, relaciona y transfiere el conocimiento aprendido.</p> <p>7CL. Manejo de recursos y estrategias.</p> <p>Competencia digital. CD</p> <p>1CD. Es responsable en el uso de las TIC.</p>
--	---

<ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas a través de recursos tecnológicos. • Explicación oral del proceso seguido en la resolución de problemas. 	<p>la resolución de problemas escritos en los que se deberá seguir el método gráfico de Singapur. A continuación se hará uso de recursos TIC, en este caso los iPads en el que tendrán que resolver los problemas paso a paso siguiendo las instrucciones del juego.</p> <p>Anexo V: Actividad 5</p> <p>Anexo VI: Actividad 6</p> <p>En grupos de 3-4 personas, lo alumnos tendrán que resolver un problema dado y una vez obtenido el resultado saldrán a la pizarra a explicar el proceso.</p>		<p>2 sesiones de 50 minutos</p>
---	--	--	---------------------------------

FICHA DE SESIÓN DE TRABAJO	
Nº: 1	Título: Manipulación de materiales
COMPETENCIAS CLAVE	
CMCT CAA	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	INDICADORES
En la resolución de problemas, utilizar la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante el método gráfico de Singapur, comunicado con claridad el proceso seguido.	1. Utiliza la manipulación y la experimentación como estrategias para la resolución de problemas.
CONTENIDOS	
<ul style="list-style-type: none"> • Experimentación con materiales manipulativos. • Resolución individual o en grupo (trabajo cooperativo). • Problemas manipulativos con sumas y restas. 	
OBJETIVOS	
<ul style="list-style-type: none"> • Conocer diferentes materiales manipulativos • Representar con materiales manipulativos las situaciones dadas 	
ACTIVIDAD	
<p>Para la primera actividad cada niño dispondrá de una plantilla con 10 huecos (5 arriba y 5 abajo) y una bolsa con fichas. Tendrán que ir poniendo las cantidades que el profesor indica en la plantilla, y una vez familiarizados en este material se darán dos plantillas de 10 huecos cada una y más fichas para proceder a resolver los problemas planteados. Mediante este material, los alumnos irán quitando o añadiendo fichas a las plantillas para representar diferentes números y ver las diferentes posibilidades que hay a la hora de resolver el problema que se propone.</p> <p>En segunda actividad se cambiará en material y se dará a los alumnos bloques multibase que representan unidades, decenas y centenas. Para empezar a familiarizarse con este material primero se representarán diferentes números con las regletas, y una vez sepan su funcionamiento se pasará a resolver pequeños problemas en los que tendrán que averiguar qué número es el que se pide, por ejemplo “Tengo 27 unos y 6 dieces, ¿qué número soy?” Se empezarán con problemas sencillos y poco a poco se subirá la dificultad.</p>	

ORGANIZACIÓN

Del aula y los escolares (agrupamiento: individual, pequeño grupo, gran grupo)

Primer actividad individual
Segunda actividad en pequeño grupo.

Duración/Tiempo estimado

50 minutos

Recursos

Plantillas y fichas, bloques multibase, mesas, sillas.

FICHA DE SESIÓN DE TRABAJO

Nº: 2 **Título:** Manipulación de materiales e introducción a la fase pictórica

COMPETENCIAS CLAVE

CMCT

CAA

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

En la resolución de problemas, utilizar la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante el método gráfico de Singapur, comunicado con claridad el proceso seguido.

INDICADORES

1. Utiliza la manipulación y la experimentación como estrategias para la resolución de problemas.

CONTENIDOS

- Experimentación con materiales manipulativos.
- Resolución individual o en grupo (trabajo cooperativo).
- Problemas escritos y manipulativos con sumas y restas.

OBJETIVOS

- Conocer diferentes materiales manipulativos
- Representar con materiales manipulativos las situaciones dadas
- Utilizar el lenguaje matemático para resolver operaciones

ACTIVIDAD

La primera actividad consiste en realizar por grupos pequeños sumas y restas con la balanza numérica, en la que tendrán que colocar colgadores en las dos partes de la balanza para conseguir equilibrarla y realizar las operaciones propuestas.

La segunda actividad consiste en la fase pictórica, en la que se dará a cada alumno una ficha con unos dibujos en la parte izquierda, y un esquema en la parte derecha que tendrán que rellenar teniendo en cuenta los objetos que aparecen. Un ejemplo sería un conjunto de flores, unas pintadas y otras sin pintar y los niños tienen que contar cuántas hay de cada tipo y colocarlo en el esquema dado. A continuación, habrá dos oraciones incompletas en las que tendrá que colocar el número de flores adecuado para poder resolver las operaciones propuestas.

ORGANIZACIÓN

Del aula y los escolares (agrupamiento: individual, pequeño grupo, gran grupo)

Primera actividad en pequeño grupo

Segunda actividad individual

Duración/Tiempo estimado

50 minutos

Recursos

Balanza numérica, colgadores, fichas, lápices, gomas, mesas, sillas.

FICHA DE SESIÓN DE TRABAJO	
Nº: 3	Título: Utilizamos el método gráfico
COMPETENCIAS CLAVE	
CMCT CL	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	INDICADORES
En la resolución de problemas, utilizar la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante el método gráfico de Singapur, comunicado con claridad el proceso seguido.	2. Representa los problemas mediante el método gráfico.
CONTENIDOS	
<ul style="list-style-type: none"> • Problemas escritos con sumas y restas. • Representación mediante el método gráfico. 	
OBJETIVOS	
<ul style="list-style-type: none"> • Utilizar el método gráfico para la resolución de problemas 	
ACTIVIDAD	
<p>En esta actividad se realizarán una serie de problemas con vocabulario que ellos conozcan para intentar facilitar el proceso. Para ello tendrán que seguir los diferentes pasos del método gráfico de Singapur que estarán escritos de forma ordenadas para que los alumnos vayan avanzando poco a poco y comprendan bien el problema para poder llegar a una solución. Dentro de este proceso tendrán que utilizar la representación mediante barras, en las que dibujarán las diferentes cantidades que muestra el problema para poder visualizarlo y llegar de forma más rápida y sencilla a una solución.</p> <p>Para guiar este proceso, el docente irá mostrando los pasos a seguir en la pizarra digital o pizarra normal, y así, se acompañará a los alumnos paso por paso y se podrán solucionar los diferentes percances que vayan ocurriendo a lo largo de la actividad.</p>	
ORGANIZACIÓN	
Del aula y los escolares (agrupamiento: individual, pequeño grupo, gran grupo)	
Actividad individual	
Duración/Tiempo estimado	
50 minutos	

Recursos
Fichas, lápices, gomas, pizarra digital, proyector, mesas, sillas.

FICHA DE SESIÓN DE TRABAJO

Nº: 4	Título: Utilizamos el método gráfico
-------	---

COMPETENCIAS CLAVE

CMCT
CL

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	INDICADORES
--------------------------------	--------------------

En la resolución de problemas, utilizar la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante el método gráfico de Singapur, comunicado con claridad el proceso seguido.	2. Representa los problemas mediante el método gráfico.
---	---

CONTENIDOS

- Problemas escritos con sumas y restas.
- Representación mediante el método gráfico.

OBJETIVOS

- Comprender los problemas propuestos.
- Utilizar el método gráfico para la resolución de problemas.

ACTIVIDAD

En esta actividad se realizarán una serie de problemas con vocabulario que ellos conozcan para intentar facilitar el proceso. Para ello tendrán que seguir los diferentes pasos del método gráfico de Singapur que estarán escritos de forma ordenadas para que los alumnos vayan avanzando poco a poco y comprendan bien el problema para poder llegar a una solución. Dentro de este proceso tendrán que utilizar la representación mediante barras, en las que dibujarán las diferentes cantidades que muestra el problema para poder visualizarlo y llegar de forma más rápida y sencilla a una solución.

Para guiar este proceso, el docente irá mostrando los pasos a seguir en la pizarra digital o pizarra normal, y así, se acompañará en cada uno de los pasos para dar solución a las dudas que vayan ocurriendo a lo largo de la actividad.

ORGANIZACIÓN

Del aula y los escolares (agrupamiento: individual, pequeño grupo, gran grupo)

Actividad individual

Duración/Tiempo estimado

50 minutos

Recursos

Fichas, lápices, gomas, pizarra digital, proyector, mesas, sillas.

FICHA DE SESIÓN DE TRABAJO

Nº: 5

Título: Resolvemos problemas con el iPad

COMPETENCIAS CLAVE

CMCT

CL

CD

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

En la resolución de problemas, utilizar la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante el método gráfico de Singapur, comunicado con claridad el proceso seguido.

INDICADORES

2. Representa los problemas mediante el método gráfico.

CONTENIDOS

- Resolución de problemas a través de recursos tecnológicos

OBJETIVOS

- Comprender los problemas propuestos.
- Utilizar las TIC.
- Hacer uso responsable del recurso tecnológico dado.

ACTIVIDAD

Esta sesión se basa en el uso de herramientas TIC, en este caso se utilizaría el iPad. Para realizar las actividades los alumnos se meterían en la página mundoprimary.com y seleccionarían el curso (2º), por tanto les aparecería una página que pone “Juegos de resolución de problemas 2º de Primaria”. Una vez realizado esto empezarían con el primer problema que consta de una serie de preguntas con respuestas

múltiples que los niños tienen que ir acertando hasta llegar a la última que será la resolución del problema.

Esta actividad combina el método Singapur con las TIC y el juego, y es un modo de aprender de una manera interactiva y divertida a través de juegos online estructurados.

ORGANIZACIÓN

Del aula y los escolares (agrupamiento: individual, pequeño grupo, gran grupo)

Actividad individual

Duración/Tiempo estimado

50 minutos

Recursos

IPad u ordenadores, mesas, sillas.

FICHA DE SESIÓN DE TRABAJO

Nº: 6

Título: Preparar exposición oral.

COMPETENCIAS CLAVE

CL

CAA

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

En la resolución de problemas, utilizar la manipulación y experimentación con materiales relacionados con el problema y la representación mediante el método gráfico de Singapur, comunicado con claridad el proceso seguido.

INDICADORES

3. Explica oralmente el proceso seguido en la resolución de problemas utilizando vocabulario específico.

CONTENIDOS

- Explicación oral del proceso seguido en la resolución de problemas.

OBJETIVOS

- Comprender los problemas propuestos.
- Explicar oralmente el proceso seguido en la resolución de problemas.

ACTIVIDAD
<p>En esta sesión, los alumnos se agruparán por parejas para resolver un problema dado por el docente. Es importante seguir los pasos que se han enseñado previamente para comprender bien el problema y organizar bien la información.</p> <p>Un vez tengan hayan comprendido bien el problema y hayan llegado a la solución, saldrán a explicar a los compañeros los pasos que han seguido y cómo lo han hecho. Para ayudar en el proceso se proyectará en la pizarra el problema y los pasos a seguir para que puedan establecer un orden.</p>
ORGANIZACIÓN
Del aula y los escolares (agrupamiento: individual, pequeño grupo, gran grupo)
Actividad por parejas
Duración/Tiempo estimado
50 minutos
Recursos
Pizarra, lápiz, papel, goma, mesas, sillas.

5.5 Evaluación

<p>Realización de actividades con diferentes materiales manipulativas.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lista de cotejo manipulación. <p>Elaboración de problemas siguiendo los pasos del método gráfico.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lista de cotejo resolución de problemas. • Diana de autoevaluación. <p>Elaboración y exposición grupal de un problema dado.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Rúbrica trabajo cooperativo. • Rúbrica exposición oral. 	<p>1. Utiliza la manipulación y la experimentación como estrategias para la resolución de problemas.</p> <p>2. Representa los problemas mediante el método gráfico.</p> <p>3. Explica oralmente el proceso seguido en la resolución de problemas utilizando vocabulario específico.</p>
---	---

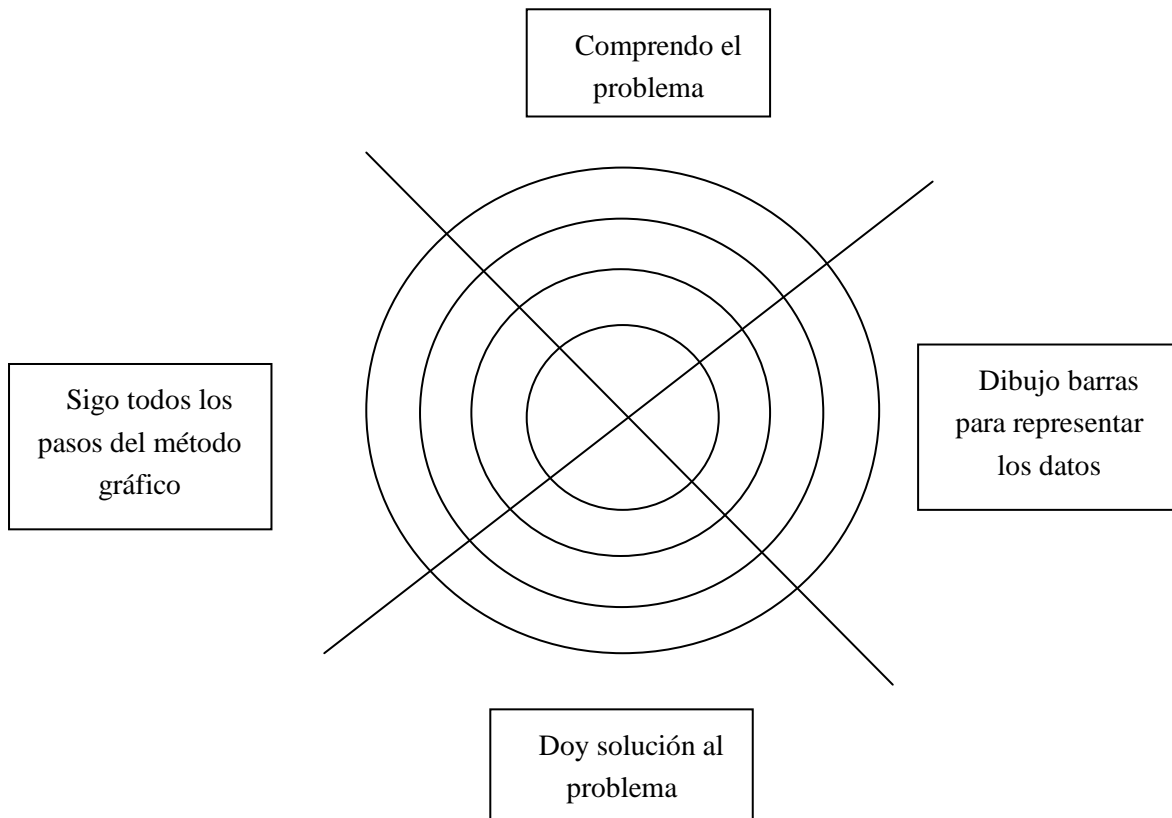
Lista de cotejo manipulación

ACTIVIDADES MANIPULATIVAS	SÍ	NO
Utiliza cada uno de los materiales correctamente		
Sabe hacer uso del material para resolver las actividades		
Sigue las instrucciones de uso que expresa el docente		
Cuida el material dado		
Da solución a las actividades		

Lista de cotejo resolución de problemas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	SÍ	NO
Identifica los datos del problema		
Sigue los pasos del método gráfico de Singapur		
Expresa las cantidades dadas mediante el modelo de barras		
Realiza las operaciones convenientes		
Expresa adecuadamente la solución		

Diana de autoevaluación



Rúbrica trabajo cooperativo

TRABAJO COOPERATIVO	2	1	0,5	0
Trabaja y participa en grupo correctamente.	Trabaja correctamente	Medio-alto	Medio-bajo	No trabaja en grupo
Cumple las tareas que se le asignan.	Cumple adecuadamente las tareas asignadas	Medio-alto	Medio-bajo	No cumple las tareas que se le asignan
Respeto las opiniones de sus compañeros y acepta las decisiones de la mayoría.	Respeto la opinión de los compañeros	Medio-alto	Medio-bajo	No respeta la opinión de los compañeros

Ayuda a sus compañeros en las tareas.	Siempre ayuda a los compañeros en las tareas	Medio-alto	Medio-bajo	No ayuda a los compañeros
Utiliza un tono adecuado.	Utiliza un tono adecuado	Medio-alto	Medio-bajo	No utiliza un tono adecuado.

Rúbrica exposición oral

PRESENTACIÓN ORAL	4	3	2	1
Claridad	Habla claramente y tiene muy buena pronunciación	Habla claramente y tiene buena pronunciación	Le cuesta hablar con claridad y tiene fallos en la pronunciación	No se entiende y/o tiene mala pronunciación
Vocabulario	Usa vocabulario apropiado	Usa vocabulario mayoritariamente correcto	Usa un vocabulario poco apropiado	Usa un vocabulario incorrecto
Contenido	Entiende y tiene claros todos los pasos del problema	Entiende el problema pero no tiene muy claros los pasos	No entiende mucho el problema pero sabe los pasos a seguir	No entiende ni sabe realizar los pasos del problema
Expresión corporal	Tiene buenas postura y se le nota relajado	Tiene buena postura	Tiene buenas y malas posturas	Tiene mala postura

6. Conclusiones

Este trabajo de Fin de Grado planteaba como objetivo general diseñar una propuesta de intervención para desarrollar las competencias de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos a través del Método Singapur. Una vez finalizado, podemos valorar en qué medida se han logrado los objetivos planteados inicialmente.

El primer objetivo específico planteaba profundizar en el método Singapur a nivel teórico y práctico, que ha podido cumplirse a través de una exhaustiva búsqueda de información sobre esta metodología y los diferentes autores en los que se ha basado este método. Además, se han realizado una serie de actividades siguiendo las bases de esta metodología y estructurándolas de lo más concreto a lo más abstracto.

El segundo objetivo específico abordaba las dificultades que los alumnos tenían a la hora de resolver los problemas matemáticos, en el que destacaba principalmente, la falta de comprensión del enunciado. Esto ocasionaba un impedimento para los estudiantes a la hora de identificar los datos correctamente y establecer relaciones.

El tercer objetivo específico proponía aportar estrategias de enseñanza para que el docente facilitara la comprensión de problemas matemáticos a los alumnos. Se planteaba la combinación de problemas relacionados con situaciones cotidianas y ficticias para despertar el interés de los alumnos, así como el planteamiento de diferentes tipos de problemas en el que se usaran procesos cognitivos distintos para cada una de las situaciones.

El último objetivo era el planteamiento de una unidad didáctica aplicando el método Singapur en alumnos de 2º de Primaria, mediante la cual se han propuesto una serie de actividades con materiales manipulativos y visuales, para finalizar con la parte más abstracta. Este objetivo se ha cumplido únicamente a nivel conceptual, por lo que no ha podido llevarse a cabo debido a la programación ya establecida del colegio al que iba dirigida. No obstante, se han tenido en cuenta las particularidades del centro educativo, y concretamente de los alumnos a la hora de establecer la unidad didáctica.

Gracias a la realización de este trabajo se ha podido profundizar sobre un método implementado en una gran cantidad de países, y que ha dado lugar a una mejora significativa en el aprendizaje de las matemáticas.

7. Bibliografía

- Aguilar, M., Inciarte, A., y Parra, Y. (2011). Aprendizaje basado en problemas y aprendizaje cooperativo como estrategia didáctica integrada para la enseñanza de la química. *REDHECS*, 11(6), págs. 199-219.
- Alba, L.A., y García, M.D.C. (2019). *El Método Singapur para el desarrollo de competencias en la resolución de problemas matemáticos con números fraccionarios* (tesis maestría). Universidad Nacional de Educación, Azogues, Ecuador.
- Alcalde, M. (2010) *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de maestro de en la Universitat Jaume I* (tesis doctoral). Universitat Jaume I, Castelló de la Plana.
- Alonso, C., López, P., y de la Cruz, O. (2013) Creer tocando. *Tendencias Pedagógicas*, (21), págs. 249-262.
- Aramburu, M. (2004). Jerome Seymour Bruner: De la percepción al lenguaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 34(1), págs 1-18.
- Arias, T.E., Arrunátegui, C.M., Julca, L.C., y Zúñiga, K.A. (2017). *Mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las competencias matemáticas tempranas mediante la aplicación del Método de Singapur, las clases eurítmicas y los grupos interactivos en los niños y niñas de 4 años del aula "Tulipanes" de la institución educativa Sagrado Corazón anexo al IPNM del distrito de Santiago de surco perteneciente a la Urgel 07* (tesis maestría). Instituto pedagógico nacional Monterrico (Lima, Perú).
- Berrocal, R., y Gómez, O. (2002). Razonamiento lógico-matemático en las escuelas. *Revista Electrónica Educare*, (2), págs. 129-132.
- Boscán, M.M., y Klever, K.L (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, 10(2), págs. 7-19.

- Cabo, M., Moreno, G., y Bazán, A. (2007). *Método gráfico de Singapur: Solución de problemas, I*. Madrid: Santillana.
- Calderón, P. (2014). *Percepciones de los y las docentes del primer ciclo básico, sobre la implementación del método Singapur en el colegio Mario Bertero Cevasco de la comuna de isla de Maipo* (tesis de maestría). Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- Cofré, A., y Tapia, L. (1995). *Cómo desarrollar el razonamiento lógico matemático*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria.
- De Benito, B., y Salinas, J.M. (2016). La investigación basada en diseño en tecnología educativa. *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa (RIITE)*, (0), págs. 44-59.
- DECRETO 108/2014 [Consellería de Educación]. Por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunidad Valenciana. [2014/6347]. 4 de julio de 2014.
- Díaz, M.Y. (2020). Desarrollo del pensamiento lógico matemático utilizando el método heurístico de G. Polya adaptado a un entorno virtual. Universidad de las Illes Balears (Palma de Mallorca). Tesis doctoral (no publicada).
- Fernández, J. A. (2014). *Modelos para resolver problemas matemáticos. Metacognición y creatividad*. Zaragoza: Edelvives.
- Galán, B. (2012). La historia de las matemáticas. De dónde vienen y hacia dónde se dirigen. Recuperado de <https://repositorio.unican.es>
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (3), págs. 11-44.
- García, J. (2002). Resolución de problemas y desarrollo de capacidades. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (29), págs. 20-38
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

- López, J. M., Moreno, E., Gómez, M. J., y López, J. M. (2004). La maravillosa historia de los números. Material de divulgación de El CSIC en la Escuela para el portal WEB Museo Virtual de la Ciencia del CSIC. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. 2004. Recuperado de <http://museovirtual.csic.es/profesores/numeros/num2.htm>
- Lupiáñez, J. L., Puig, L., y González-Calero, J. A. (2015). Pensamiento numérico y algebraico e historia de las matemáticas y educación matemática. *Ensayos: Revista de La Facultad de Educación de Albacete*, 30(1), págs. 1–7.
- Melquiades, A. (2013). Estrategias didácticas para un aprendizaje constructivista en la enseñanza de las matemáticas en los niños y niñas de nivel primaria. *Perspectivas docentes*, (52), págs. 43-58.
- MOE (2012). Ministry Of Education, Singapore. Recuperado de: <https://www.moe.gov.sg/>
- Mora, C.D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 24(70), págs. 181-272.
- Noda, M. A. (2009). *Pizarra digital interactiva en aulas de matemáticas*. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, (72), págs. 121-127.
- OCDE (2017). Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias, Versión preliminar, OECD Publishing, Paris.
- Orozco, V.M. (2017). *Optimización del método Singapur usando TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de primer grado* (tesis maestría). Universidad Del Norte, Barranquilla, Colombia.
- Pérez, Y., y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73), págs. 169-194.
- Polya, G. (1965) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rambao, C., y Lara, I.M (2019). *Efecto del Método Singapur como una estrategia para el fortalecimiento de la resolución de problemas matemáticos* (tesis maestría). Universidad de la Costa, Barranquilla, Colombia.

Urbano, S., Fernández, J.A., y Fernández, M.P. (2016). El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria. *Revista Internacional de Ciencia, Matemáticas y Tecnología*, 3(1), págs. 23-37.

Matemáticas método Singapur en España (2011). Recuperado de www.metodosingapur.com

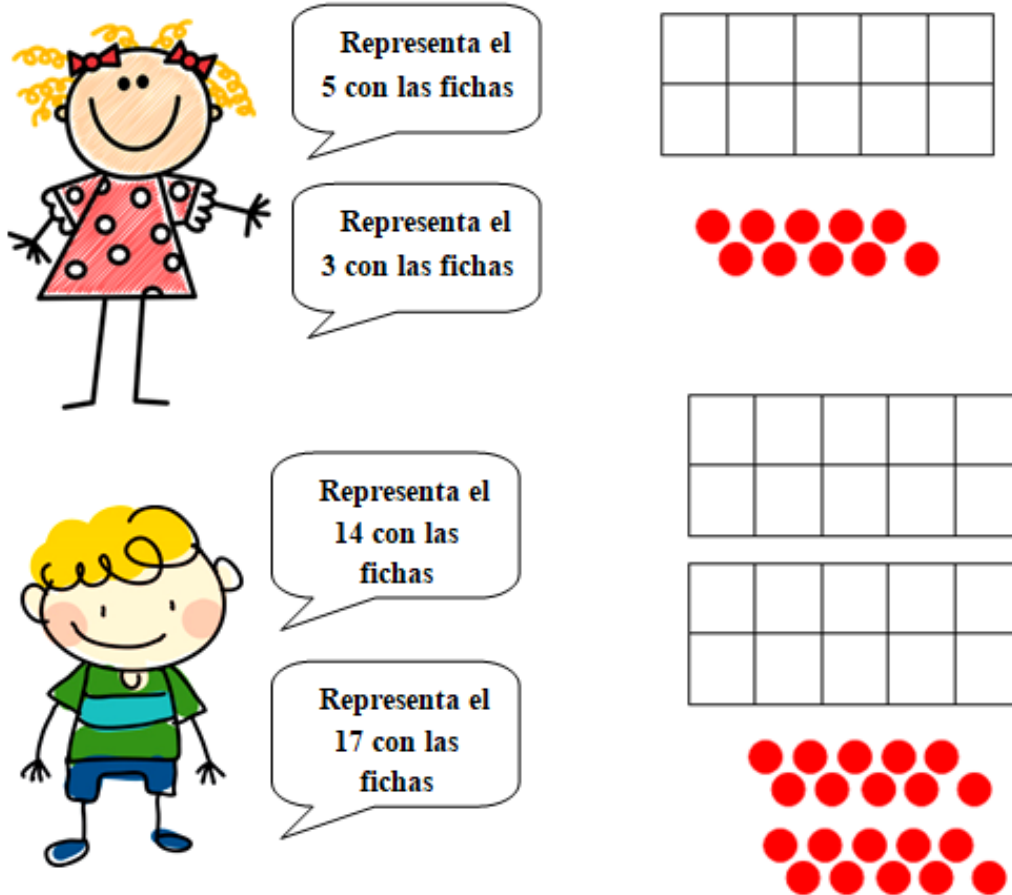
Polygon education. (2013). *Cultivar el talento y la pasión por aprender*. [Consulta: 10 de marzo de 2020] www.polygoneducation.com.

Zúñiga, G. (2013). *Metodología Singapur: el caso del Método del Modelo de Barras. Una mirada Socioepistemológica* (tesis maestría). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

8. Anexos

Anexo 1: Actividad 1. Representar con fichas.

¿ME AYUDAS A REPRESENTAR ESTOS NÚMEROS?



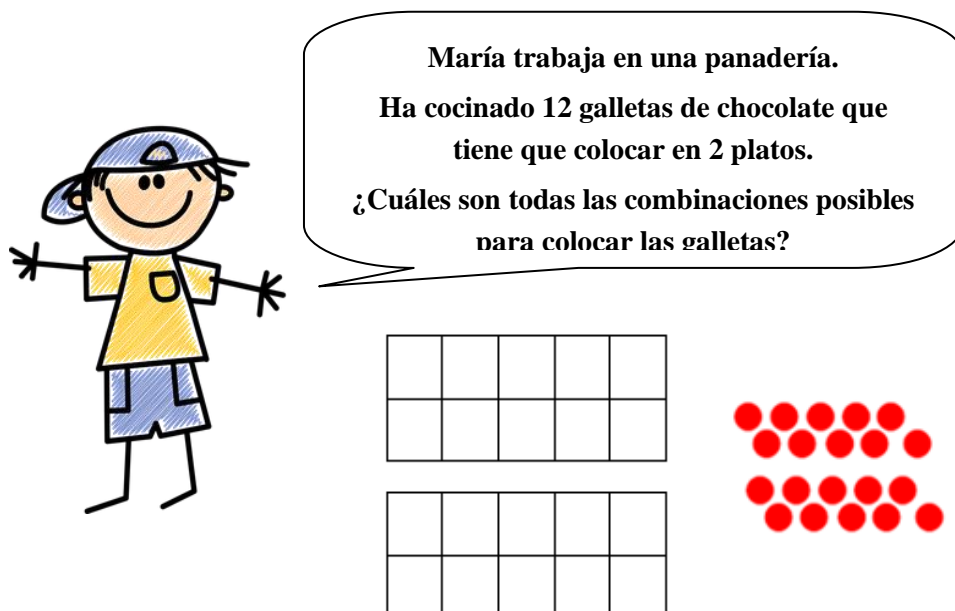
Representa el 5 con las fichas
 Representa el 3 con las fichas
 Representa el 14 con las fichas
 Representa el 17 con las fichas

Ilustración 1: Dibujo animado

Ilustración 2: Plantillas y fichas

Fuente: Fundación Aspren (2021)

Fuente: Elaboración propia



María trabaja en una panadería.
Ha cocinado 12 galletas de chocolate que tiene que colocar en 2 platos.
¿Cuáles son todas las combinaciones posibles para colocar las galletas?

Anexo 2: Actividad 2. Representar con regletas.

¿ME AYUDAS A REPRESENTAR ESTOS NÚMEROS CON LAS REGLETAS?



Representa con las regletas el número 25

Representa con las regletas el número 132

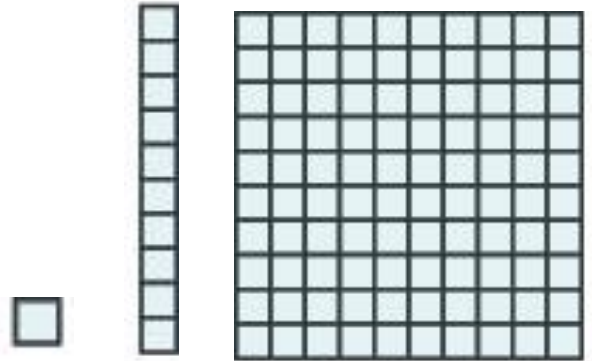


Ilustración 3: Regletas base 10

Ilustración 4: Dibujo animado 2

Fuente: Vecteezy (2021)

Fuente: Elaboración propia

¿TE ATREVES A DAR UN PASO MÁS? ¿COMBRUÉBALO!



Tengo 27 unos y 6 dieces.
¿Qué número soy?



Tengo 3 cienos 14 dieces y 7 unos
¿Qué número soy?



Si me das 2 dieces seré el 105
¿Qué número soy?



Si me das 5 unos y 4 dieces seré el 85
¿Qué número soy?

Anexo 3: Actividad 3. Equilibra la balanza.

¿ME AYUDAS A RESOLVER LAS OPERACIONES CON LA BALANZA?

$$\begin{array}{l}
 \boxed{9} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} \\
 \boxed{15} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} \\
 \boxed{8 + 6} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad} \\
 \boxed{10 + 3} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad} \\
 \boxed{6 + 2 + 7} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad} \\
 \boxed{5 + 5 + 5} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad}
 \end{array}$$



Ilustración 5: Balanza numérica

Fuente: Alupé (2020)

Anexo 4: Actividad 4. Usamos el lenguaje matemático.

¿ERES CAPAZ DE REPRESENTAR LAS IMÁGENES CON LENGUAJE MATEMÁTICO?



15 NIÑOS

7 CON LIBRO

8 SIN LIBRO

$__ \text{ NIÑOS CON LIBRO} + __ \text{ NIÑOS SIN LIBRO} = __$

$__ \text{ NIÑOS} - __ \text{ NIÑOS SIN LIBRO} = __ \text{ NIÑOS CON}$

Ilustración 6: Niños con libro y sin libro

11 COCHES



__ ROJOS

__ VERDES

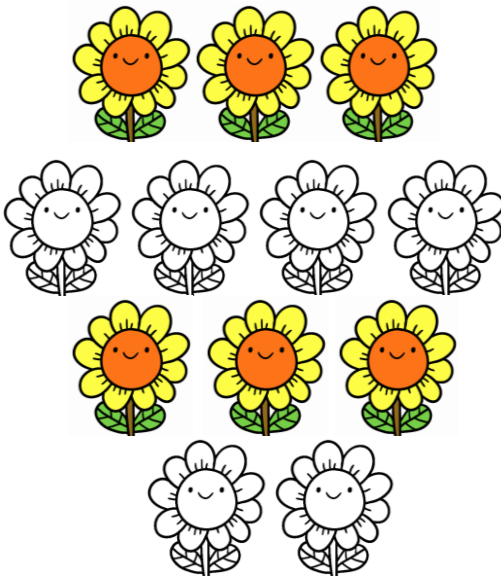
__ AZULES

__ ROSAS

__ COCHES TOTALES - __ COCHES ROJOS = __

__ COCHES VERDES + __ COCHES ROSAS = __

Ilustración 7: Coches de colores



__ FLORES

__ CON COLOR

__ SIN COLOR

__ FLORES CON COLOR + __ FLORES SIN COLOR = __

__ FLORES - __ FLORES SIN COLOR = __ FLORES CON COLOR

Ilustración 8: Flores con color y sin color

Anexo 5: Actividad 5. Problemas con el método gráfico de Singapur.

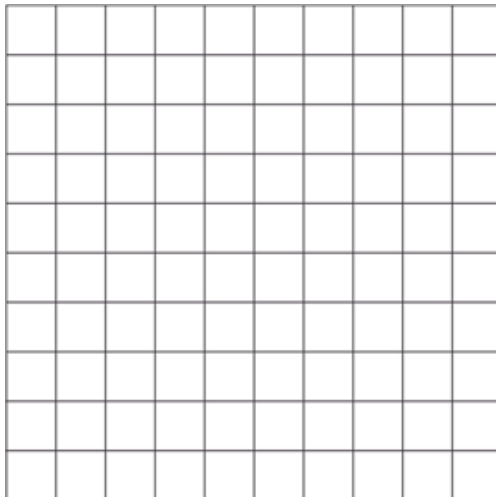
1. Lee con atención el problema.

María tiene 15 lápices y su hermano
21. ¿Cuántos lápices tienen en total?

2. ¿De qué se habla? ¿De quién se habla?



3. Dibuja una barra unidad cada cantidad.



Representa en una barra
de unidad los lápices que
tiene María y los que tiene
su hermano

4. Lee otra vez el problema frase por frase.

5. Ilustra la barra unidad con la información del problema.

6. Identifica la pregunta.

7. Haz las operaciones y escribe el resultado en el gráfico.



¿Qué operación
harás para saber los
lápices que hay en
total?

8. Escribe la respuesta del problema.

¿PROBAMOS CON MÁS PROBLEMAS? ¡ÁNIMO!

1. Lee con atención el problema.

Para construir una casa se compraron 147 ladrillos. Si sobraron 32, ¿cuántos ladrillos se usaron?

2. ¿De qué se habla? ¿De quién se habla?

3. Dibuja una barra unidad cada cantidad.

Representa en una barra de unidad los ladrillos que se compraron y los que sobraron.

4. Lee otra vez el problema frase por frase.
5. Ilustra la barra unidad con la información del problema.
6. Identifica la pregunta.
7. Haz las operaciones y escribe el resultado en el gráfico.



¿Qué operación
harás para saber los
ladrillos que se
utilizaron?

8. Escribe la respuesta del problema.



¡LO ESTÁS HACIENDO GENIAL! ¿CONTINUAMOS?

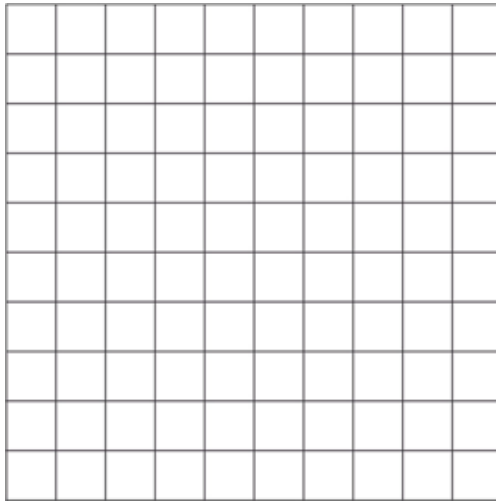
1. Lee con atención el problema.

Mi amiga Marta me ha regalado una caja de 50 bombones. Mi madre se ha comido 7 y mi padre 5. ¿Cuántos bombones quedan?

2. ¿De qué se habla? ¿De quién se habla?



3. Dibuja una barra unidad cada cantidad.



Representa en una barra los bombones que me han regalado y los que se han comido mi madre y mi padre.

4. Lee otra vez el problema frase por frase.

5. Ilustra la barra unidad con la información del problema.

6. Identifica la pregunta.

7. Haz las operaciones y escribe el resultado en el gráfico.



¿Qué operación harás para saber cuántos bombones quedan?

8. Escribe la respuesta del problema.



¡A POR EL ÚLTIMO!

1. Lee con atención el problema.

Mi prima quiere colocar 9 caramelos en 3 bolsas para regalar. ¿Cuántos caramelos debe colocar en cada bolsa para que todos tengan la misma cantidad de caramelos?

2. ¿De qué se habla? ¿De quién se habla?

3. Dibuja una barra unidad cada cantidad.

Representa en una barra los caramelos que hay y las tres bolsas para repartir los caramelos.

4. Lee otra vez el problema frase por frase.

5. Ilustra la barra unidad con la información del problema.

6. Identifica la pregunta.

7. Haz las operaciones y escribe el resultado en el gráfico.

¿Qué operación harás para saber cuántos caramelos van en cada bolsa?

8. Escribe la respuesta del problema.

Anexo 6: Actividad 6. Juegos de problemas online




Que un bote de refresco cueste 1 euro



Frases posibles e imposibles

Una caja tiene 5 galletas. Si compramos 4 cajas ¿Cuántas galletas tenemos?


- a) 5 caramelos y 4 cajas
- b) 5 galletas y 5 cajas
- c) 5 galletas y 4 cajas



Resolución de problemas. Método

Un hombre tiene 6 rosas. Las reparte en partes iguales en 2 jarrones ¿Cuántas rosas debe colocar en cada jarrón?

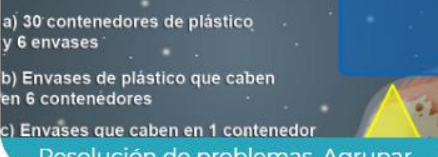
- a) 2 rosas y 6 ramos
- b) 2 rosas y 6 jarrones
- c) 2 ramos



Resolución de problemas. Método

En un contenedor amarillo caben 30 envases de plástico. Si hay 6 contenedores amarillos ¿Cuántos envases de plástico caben?

- a) 30 contenedores de plástico y 6 envases
- b) Envases de plástico que caben en 6 contenedores
- c) Envases que caben en 1 contenedor




Resolución de problemas. Agrupar

Ilustración 9: Página problemas matemáticos

Hay 50 ladrillos que se reparten a albañiles. ¿Cuántos ladrillos deben colocar cada albañil?

- a) 50 ladrillos y 5 albañiles
- b) Ladrillos a colocar por un albañil
- c) 50 sacos y 6 albañiles
- d) Ladrillos a colocar por 5 albañiles



Sonido + Juegos Inicio 1 / 8

Ilustración 10: Problema 1

**Hay 50 ladrillos que se reparten 5 albañiles.
¿Cuántos ladrillos deben colocar cada albañil?**

a) 10 ladrillos
b) 50 ladrillos
c) 5
d) 5 ladrillos




Ilustración 11: Problema 2

**Se reparten 18 pacientes entre 2 doctores
¿Cuántos pacientes son atendidos por el mismo doctor?**

a) Pacientes atendidos por un doctor
b) 18 pacientes y 2 enfermeras
c) 2 doctores y 18 pacientes
d) Doctores que atienden al mismo paciente




Ilustración 12: Problema 3

Se reparten 18 pacientes entre 2 doctores
¿Cuántos pacientes son atendidos por el mismo doctor?

a) 9
 b) 9 pacientes
 c) 9 doctores
 d) 8 doctores




Ilustración 13: Problema 4

Se quieren repartir 15 caramelos entre 3 niños y niñas,
 ¿en cuál de las dos imágenes se han repartido a partes iguales?

Reparto A	Reparto B
 <p>REPARTO A</p>	 <p>REPARTO B</p>

Ilustración 14: Problema 5

Un pescador pescó 3 peces por la mañana y otro pescador 5 peces por la tarde ¿Cuántos peces pescaron?

DATOS:

- Un pescador pescó _____ peces.
- Otro pescador pescó _____.

5
 peces
 3




Ilustración 15: Problema 6

The illustration shows a spiral-bound notebook with a light gray cover. On the right side, there is a vertical strip with a dark blue background and a starry sky pattern. The word "peces" is written in red at the top of this strip. Below it, the numbers 5, 8, and 3 are written in red, stacked vertically. On the left side of the notebook, the word "OPERACIÓN:" is written in blue. Below it, a blue plus sign is inside a circle, followed by a vertical column of three boxes. The top box is empty, the middle box is empty, and the bottom box contains the number 8. Above the top box is a blue letter 'U'. Below the boxes, the word "SOLUCIÓN:" is written in blue. At the bottom, the word "Pescaron" is written in blue, followed by two blank lines and a period.

Ilustración 16: Problema 7

Fuente: mundoprimary (2021)